Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012
CLASA a IX-a – Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

Soluţie. Observăm că, dacă $\{x\} = 0$, atunci ecuaţia este verificată. **2p**

De asemenea, ecuaţia este verificată în cazul când $[x] = 0$. **2p**

Pentru $\{x\} \neq 0$ ecuaţia este $\{x\}^5 = (x - [x])(x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4)$, adică $\{x\}^4 = x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4$. Dacă $[x] \neq 0$, atunci membrul drept din ultima ecuaţie este suma dintre $[x]^4$ şi patru termeni pozitivi, deci este mai mare decât 1, iar membrul stâng este mai mic decât 1, ceea ce arată că în acest caz nu există soluţii. Aşadar, mulţimea soluţiilor este $[0, 1] \cup \mathbb{Z}$. **3p**

Problema 2. Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Notăm $S = a + b + c$. **1p**

Membrul stâng este $\frac{a}{S+a} + \frac{b}{S+b} + \frac{c}{S+c} = 3 - S\left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c}\right)$ **2p**

Inegalitatea devine $4S\left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c}\right) \geq 9$. **1p**

Deoarece $4S = (S + a) + (S + b) + (S + c)$ şi $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ pentru orice $x, y, z > 0$, inegalitatea este demonstrată **3p**

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B şi C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) şi (AC) în N, respectiv M. Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle PAQ$ să aibă aceeaşi bisectoare.

a) Arătaţi că $\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}$.

b) Arătaţi că mijloacele segmentelor $(BM), (CN), (PQ)$ sunt coliniare.

Soluţie. a) Din ipoteză reiese $\angle AMP \equiv \angle ABQ$ şi $\angle MAP \equiv \angle BAQ$, deci $\Delta APM \sim \Delta AQB$, de unde $\frac{MP}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$; analog $\frac{NP}{CQ} = \frac{AP}{AQ}$ **2p**

Prin împărţire obţinem concluzia **1p**

b) Fie $\frac{MP}{PN} = \frac{BQ}{QC} = k$. Avem $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$. **1p**

Pentru mijlocul S al segmentului (BM) avem $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM})$; analog pentru mijloacele T, U ale segmentelor (CN), respectiv (PQ) **1p**

Deducem $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AS} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AT}$, de unde concluzia **2p**

Problema 4. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant şi are proprietatea: a_n *divide* n^2, *oricare ar fi* $n \geq 1$. Arătaţi că:

– fie există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;

– fie există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Soluţie. Deoarece şirul este neconstant, există n_0 astfel încât $a_n > 1$ pentru $n \geq n_0$. Astfel, dacă $p > n_0$ este un număr prim, atunci $a_p = p$ sau $a_p = p^2$ **1p**

În cazul când $a_n \leq n$ pentru orice n, luând un număr prim $p > n_0$ obţinem $a_p = p$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n$ pentru $n \geq p$: dacă $a_n = n$, atunci $n + 1 \geq a_{n+1} \geq n$ şi $a_{n+1} \mid (n + 1)^2$ implică $a_{n+1} = n + 1$. Aşadar, în acest caz putem lua $n_1 = p$ **3p**

Rămâne cazul când există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_m > m$. În acest caz, deoarece $m + 1 \nmid m^2$ (deoarece $m + 1 \mid m^2 - 1$, $m + 1 > 1$ iar m^2 şi $m^2 - 1$ sunt prime între ele) rezultă că $a_m \geq m + 2$, deci $a_{m+1} > m + 1$. Continuând inductiv obţinem $a_n > n$ pentru orice $n \geq m$. În particular, luând un număr prim $p > m$ obţinem $a_p = p^2$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n^2$ pentru $n \geq p$: dacă $a_n = n^2$, atunci $a_{n+1} \geq n^2 > \frac{1}{2}(n + 1)^2$ (ultima inegalitate fiind valabilă deoarece $n \geq p \geq 3$) şi $a_{n+1} \mid (n + 1)^2$ implică $a_{n+1} = (n + 1)^2$. Aşadar, în acest caz putem lua $n_2 = p$ **3p**